17 April 2025	The Halting Problem
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	2 Friends
Plan	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
A Computability Basis	ĊŜ
* Announcements	
* Computability Reduction	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

• •	Ŧ) V	لحاف	2 in	2-	• •	، کر	S,	· · ·	Pr	00)rci	ui.	5	• •	•	•	•	• •	• •	•	•	o o o o	•	••••	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•
• •	• •	÷	• •	•	•	• •	•	0	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	0	•	• •	•
• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	••••	•	•	•	• •		•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•
• •	•	0 1	• •	.]) .v =	ĻΓ	er	ų s	· ·	-	•	• •	ŀ		NC	ju		X-	S				S,	rpe	et.	5	~{	· · ·	Ş	$\frac{1}{\sqrt{1}}$		م ک ک	0	• •	
	•	÷	• •	•	•	• •	÷	•		•	•	• •	•	•			•				•	•	• •	•		÷	•	• •	•	•		·	÷	• •	•
• •		•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	•		•	•	• •		• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•
		÷	• •	¢				•	• •							•	•			• •		•	• •	•	• •				•	•				• •	
• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	· · ·	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	0	• •	•	•	• •	•
• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	P		ya Ya		Ĺ	•	T	• · ·		24	ίv,		Ś	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•
• •	•	÷	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	•		•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•
• •	• •	•	• •	٠	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	•		•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•
• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •		•	••••	•	•		•	•	•	• •		•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•
	•	•		•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•		•	•	•	• •		•	•	• •	•	• •	•	•		•	•		•	•		•
		•		•	•		•	•	• •	•	•		•			•	•	•	• •		•		• •	•		•			•	•		•	•		
				٠																															
• •	. 0	٠	• •	•	0	• •	0	0	• •	٠	٠	• •	٠	0	• •	0	٠	0	•		٠	0	0 0	0	• •	۰	0	• •	٠	0	• •	0	÷	• •	۰
				÷																															
				•																															
				•																															

Problems US, Programs	· · · · · · · · · ·
.	
Problems = Languages = Subsets of	Strings
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i$. .
Programs = Strings	. .
$\langle P \rangle \in \mathbb{Z}^{\times}$	· · · · · · · · · · ·
$F_{act} P(z^*) > z^* $	· · · · · · · · · · ·
Corollary. There are problems that are not by ANY program!	$S_{2}(\gamma 2)$
. .	

•	What	does	;F	mean	for	program	to s	slue	problem	e
•										
•										
•										
						• • • • • •	• • • • •			
٠										
•			• • •		• • • •					
•		• • • •	• • •							
•										
•										
		• • • •	• • •							
•										
•			• • •							
•		• • • •	• • •		• • • •			• • • •		
•										
			• • •							
			• • •		• • • •					
•										
•	• • • • •	• • • •	• • •		• • • •				• • • • •	• • • • •

What does it	mean for	program to	<u>solve</u> problem?
A Langueze	r_{1}	ecognizable	(RE)
there exist	S A		
· · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·		
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

What does it mean for program to solve problem?
A Language L is Recognizable (RE) if there exists a program P s.t.
$\mathcal{L}((\cdot, \mathbf{P}, \cdot)) = \mathcal{L}(\cdot, \mathbf{P}, \cdot)$
$=$ $X \in \Sigma^{\times}$ P accepts \times f
In other words: $x \in L \iff P$ accepts x .

What does it mean for program to solve problem?
A Language L is Decidable (R) if there exists a program D s.t.
and D always halts.
accepts/ rejects in finite time

What does it	mean for	program to	Solve	problem?
A Language there exist	rs rs rs rs	Decidable Joan D	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	· · · · · ·	. .
$d = \frac{1}{2} $	alway s	halts.		
	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$X \in \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} $	D'rejer	
	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·

What does it mean for program to solve	Dvobleur ?
A Language L is co-Recognizable there exists a program P s.t.	
$= \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\$	
$\times \notin \square \langle = \rangle P accepts \chi$. .
Precognizes the complement	

Theorem		nguage		Decido	
					-Recognizade.
· · · · · · · · · · · ·	 	· · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
	RECONTRACTOR				
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$				· · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 	$\begin{bmatrix} x & x & y \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y \end{bmatrix} = $		· · · · · · · ·	
	 		· · · · · · · ·		Recognizable
co-Recognizable					· · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · ·		Decida	ble		· · · · · · · · · · · ·

· · ·			0 < 4	2 V	~		· ·	· ·	A	•			γc	J		S	2	•		•	· ·	•	2	•		D (s C		40	5		-) (R) .	•
· · ·	· · ·	•	, , ,	£			· · ·		•	[Ś	•	R	Q.		ح) . (n (ZE		<u>(</u> ے()	 	 	•		n		•	· C·	0'-	R R (ر کو ر _ ر د	: 0° Ř)~ _=	רי ביר ביר ביר	<u>-</u> ~	L	· · · · ·
<u>Pf</u>	· ·		E E	R R		=)	 	· · ·	E	Ri	r E r	•		· · ·	9				се	• • R			•	• •		•	•	· · ·	•	•	· · ·	•		•	· · ·	•	
• •		٠	• •	٠	0	٠	• •	• •	0	٠			• •	• •	٠		٠	٠	٠	٠	• •		٠		٠	٠	٠	• •	٠	0	• •	٠	٠	0	• •	0	٠
• •		•	• •	•	•	•			•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•	•		•	•		•	•	•		•	•
• •			• •	٠	٠								• •							٠		٠			٠			• •	٠		• •			٠	• •		
• •			• •	•	٠		• •		٠		٠	٠	• •		٠	٠	٠	•	٠	٠	• •		•	•	٠		•	• •	٠	•	• •	۰		٠	• •		٠
• •				٠	•	•	• •					٠						•	•	•			•			•	•						•		• •	٠	٠
• •				٠	•	•	• •	• •				٠	• •				•	•	•	•			•	•	•	•	•	• •	•				•	•	• •	•	٠
		•		•	•	•			•	•	•	•			•	•	•	•	•	•		•	•		•	•	•		•	•		•	•	•		•	•
				٠	٠	•		• •	0	•	*										• •	•	٠	•	٠	٠		• •	٠	٠			•	٠		٠	
• •							• •						• •												•									•			
• •					٠		• •				•	٠	• •			٠			•	•				•	٠		•	• •	•	٠	• •	٠		٠	• •		٠
• •		٠	• •	٠		٠	• •		٠	•	٠		• •		٠		٠	٠	٠	٠	• •	٠	٠	•	٠	٠	٠	• •	٠		• •		٠	٠	• •	٠	
• •																																					
• •																																					
• •																																					
• •																																					
									0										*						•							•		•			
0 0				٠			• •						• •		٠					٠			٠		٠		•	• •	٠	٠		٠		٠			
• •			• •	•	٠		• •				٠					٠			٠	٠			•	•	*		٠	• •	٠			٠		٠			

	Neovem.	$A \wedge o$	nguage L	is De	cidable (R)
· · · · ·			Recognizabl (RE)	e omd	Co-Recognizade. (coRE)
• • • •	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		and Let co R		. .
			$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} D \end{array} \right)^{n} = 0$		
· · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
					· · · · · · · · · · · · · · ·

Theorem A language L is De	cidable (R)
iff L is Recognizable and (RE)	
Pf [ER =) [ERE and [EcoRE]]	
$f = Jec: dev D = L$, \Rightarrow	
Consider neu program D defined as:	
Run Don X	
accept	

Theorem. A language L is Decidable (R)
iff L is Recognizable and co-Recognizable. (RE) (ORE)
$\frac{Pf}{I} (ERE) ($
$f = Jecider D$ s.t. $J(D) = L$, $\Rightarrow L \in RE$
Consider neu projram D' defined as:
- D always halts, so On input x D vejects x Example on x if D vejects, <u>accept</u>

Theorem A language	L is Decidable (R)
	izable and co-Recognizable. (coRE)
$\frac{Pf}{I} \vdash eR =) \vdash eR = ond \vdash i$	$\mathcal{E} \sim \mathcal{R} = \frac{1}{2}$
F Jecider D s.t. J(D	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Consider new program D	defined as "
De lif Drefects,	Devejects X. L.
a construction of the cons	$\Rightarrow L(D) = L(D) = L$

	reorem. A la	nguage]	is Decidat	ste (R)
· · · · ·		Recognizable (RE)	and co-T	Lecognizade. (coRE)
$\frac{P_{1}}{P_{1}}$	$LER \leftarrow LERE$		· · · · · · · · · · · · ·	
	J. Program P.		F program	
· · · ·		Paccepits X		Q accepts X
		, 		
· · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·			
	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			

Theorem A language L is Decidable (R)	•
iff L is Recognizable and co-Recognizable (RE)	L.
$\frac{Pf}{J} LeR \leftarrow LeRE and LecoRE J program Q J program Q J program Q st. if x \notin L Q accepts st. if x \notin L Q accepts x st. $	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Construct Decider for L D	•
D: Run P and Q on x in pavallel if P accepts, [accept] if Q accepts, [veject]	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Announcements
× HWIF due
* HW8 delayed til Friday
Larger homework due April 291
L., Final Required HW for class.
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
<pre>- · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·</pre>
<pre> · · · · · · · · · · · · · · · · ·</pre>

Undecidable	Problems	$L \notin R$	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
· · · · · · · · · · · · · · ·			
r r r r r r r r r r			
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		
co-Recognizalde	$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	Recognizable
	a a a a a a a a b a a a a a a a a a a a	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·

DIAGONA	$L = \left\{ \left< P \right> \right\}$. P does <u>NoT</u> accept $\left< P \right>$
The	set of encodings of programs
	that do NOT accept their own encoding.
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Theorem	DIAGONAL is Undecidable?
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·	
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

DIAGONA	$L = \{P\}$. P does <u>NOT</u> accept $\{P\}$
	set of encodings of programs that do NOT accept their own encoding.
Theorem	DIAGONAL is Undecidable
$f(P_{i})$	$\langle P_1 \rangle \langle P_2 \rangle \langle P_3 \rangle$ \rightarrow program encodings $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$

DIAGONA	$L = \left\{ \left\langle P \right\rangle \right\}$. $P \text{ does } NOT \text{ accept } \left\langle P \right\rangle$
	set of encodings of programs that do NOT accept their own encoding.
Theorem	DIAGONAL is Undecidable $\frac{1}{2}$ \rightarrow program encodings
$L(P_1)$ $L(P_2)$ $L(P_3)$	
languages	$(P_3) \in \mathcal{L}(P_4)$

$DiAGONAL = \left\{ \begin{array}{c} P \end{array} \right\}$. P does <u>NOT</u> accept $\left\langle P \right\rangle$
L. The set of encodings of programs that do NOT accept their own encoding.
Theorem DIAGONAL is Undecidable $\frac{1}{P_1}$, $\langle P_2 \rangle$, $\langle P_2 \rangle$, \sim
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

DIAGONA	$L = \left\{ \begin{array}{c} P \end{array} \right\} $. P does <u>NOT</u> accept	
	set of encodings of programs that do NOT accept their own	encoding.
Theorem	$\langle P_1 \rangle \langle P_2 \rangle \langle P_3 \rangle \sim$	· ·
$\mathcal{I}(P_2)$. .
· · · · · · · · · · · ·		$\langle P_i \rangle \in \text{Diagonal}$
DIAGONAL		$\langle P_i \rangle \notin \mathcal{I}(P_i)$

Undecidable Pr	oblems	$L \notin R$	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · ·
CORE				
			· · · · · · · ·
DIAGONAL			 	
				Recognizable
co-Recognizade		$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				

Undecidable Proble	zuns LEF)
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
e^{-1}		
DIAGONAU		$\overline{DIAGONAC}$
		Recognizable
co-Recognizade	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Decidable	Z <p>: P accepts <p>Z</p></p>

So what?	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
* DIAGONAL	is quite	contrived	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · ·	
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

So what?
* DIAGONAL is quite contrived
* Idea Reductions
Show that other problems
Capture DIAGONAL
=> these problems are undecidable.
. .

· ·

HALT = Z (Q, x): Program Q halts Z on input x J
Theorem HALT EREXR. -Recognizable, But Undecidable.
Pf- By Reduction from DIAGONAL-
, Finite running time.
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
. .

HALT = Z {Q, x} : Program Q halts Z on input x J
Theorem HALT ERENR. -Recognizable, But Undecidable.
Pf. By Reduction from DIAGONAL. , Finite running time.
$\langle P \rangle$ reduction $\langle Q \rangle \times \rangle$ s.t.
P accepts $\langle P \rangle \iff O$ helts on \times

DIAGON	$\overline{AC} = \sum \langle P \rangle$	Progra	m. Praccepts	$\langle P \rangle$ f
HALT			vain Q halts on input x	
. .	\sim	reduction	$\left \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$. .
Reduction On input	$\langle P \rangle$ write	description	of Q defined o	ξ2
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·
			· ·	
			· · · · · · · · · · · · · ·	

DIAGONAL = Z (P): Program P accepts (P) J
HALT = Z (Q, x). Program Q halts Z on input x J
(P) reduction
Reduction on input (P) write description of Q defined as
Q: Run Pon X. if P Accepts, laccept
I.f. P. rejects, Enter infinite loop
$O_{n+p_{n+1}} \langle Q, \langle P \rangle \rangle$

Consider behavior of Q running on (P) On input x, Run Pon $X = \langle P \rangle$ if P Accepts, laccept if P rejects, Enter infinite loop

Consider behavior of Q running on (P) On input <P> Run Pon (P) $X = \langle P \rangle$ if P Accepts, laccept) if P rejects, Enter infinite loop if P accepts (P) Then Q halts

Consider behavior of Q running on (P) On input <P> Run Pon (P) $X = \langle P_{i} \rangle$ if P Accepts, Laccept) if P rejects, Enter infinite loop if P accepts (P) Then Q halts if P does NOT accept (P) Prejects (P) ~ Que loops forever

Consider behavior of Q running on (P) On input <P> Run Pon (P> $X = \langle P \rangle$ if P Accepts, laccept) if P rejects, Enter infinite 100p if P accepts (P). Then Q halts if P. does NOT accept (P) > does not half and condoes not halt Q does not halt.

Undecidable Problems	$ \overset{\alpha}{\vdash} \overset{\alpha}{\vdash} \overset{\alpha}{\not} \overset{\alpha}{\vdash} \overset{\alpha}{\restriction} \overset{\alpha}{} }$
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
HALT	HALLT AND
DIAGONAL	DIAGONAL
	Recognizable
co-Recognizable	
Decida	
. .	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	