9 April 2025	Tutezer	linear	Programming
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
Plan	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
* Approximating	Minimum Verte	ex Cover	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
* Announcemen	t.s.	· · · · · · · · ·	
* Integer linea	r Programs		· · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
FACTORING
SHOUT PATH P EDIT DIST MAX FLOW MULTIPLY
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
What do we do with NP-Hard problems
(i) Give Up!
2 Solve SAT (per Lecture 28)
3 Solve Approximately
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Minimum Weighted Vertex Cover Given: Undirected Graph G= (V, E) v/ vertex weights W = Zw, Jver Find: Minimum weight Vertex Cover CEV Zw . . . ( . \ .) .  $\left(3\right)$ ) (<u>2</u>) 7) . . .

Minimum Weighted Vertex Cover Given: Undirected Graph G= (V, E) v/ vertex weights W= Zw, Jver  $0 \leq v_{v} t_{v} > 0$ Find: minimum weight Vertex Cover CEV Zw,  $( \cdot, \cdot )$ 3 2 7)

Minimum Weighted Vertex Cover
Given: Undirected Graph G= (V, E) v/ vertex weights W= Zwy Jvev
Find: minimum weight Vertex Cover $C \in V$ $\sum_{v \in C} w_v$
(5) Min Wt. VC is NP-Hand
3 PF. Zwr=1: VEVJ vecover S VERTEX Cover pro Ser.

Approximate Minimum Weigh	ted Vertex Cover
Given: Undirected Graph	$C_{i} = (v, E)$
v/ vertex weight	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i$
Find: minimum weight	$ \langle \mathcal{A}_{\mathcal{A}} \rangle \geq \mathcal{O} $
Vertex Cover C	
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
$W^{\star}(G) = min$	$(c^{*})$
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Approximate Minimum Weighted Vertex Cover
Given: Undirected Graph G= (V, E)
v/ vertex weights W = Zw, Jvev
$w_v \geq 0$
Find: minimum weight
Vertex Cover C = V
$ \sum_{i=1}^{n} \sum_{$
$\sum_{i=1}^{\infty} (i - i) = mi - mi$
$\mathcal{L}^* \stackrel{\sim}{=} \mathcal{V}$
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Approximation Ratio
of Algorithms A $X = Max$
(for minimization of a land of a lan
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Today New paradigm for	approximation algos.
* Integer Lineau Prog	jramming. (ILP)
$f \rightarrow f \times acf  version;$	NP-1+a
Relaxed version:	Linear Programming EP
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	(generalizes Max FLOW)
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
.       .	.       .
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
<ul> <li></li></ul>	
<ul> <li></li></ul>	

Today New paradigm for approximation algos.
* Integer Lineau Programming. (ILP)
$ \qquad \qquad$
Laxed version: Linear Programming EP
(generalizes MaxFLOW)
× Paradigm;
- Write down ILP - Solve correspondice LP
- Round solutions to be integral

Announc	e men ts	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
* Prelim	2 Graded ->	Released	After Lecture,
	Released Today	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · ·		· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

• •		n t			· · ·	( U	مع ا			· ·	P' =	، مے ا	rav		M	<u>, v</u> .	<u></u>	•	• •	•	• •	•	•	•••	•	•	• •	•	• •	•	•
· ·	. V 0	~~`	÷ ÷ ·	بو ډ	· · ·	•	· · ·	•	• •	$\times'$	· · ·	X	2. 1	  	–	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	× × ·	· ·	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	· ·	•	· · ·	•	•
· ·	1i	ne		· · ·	 i.n.	e ~		a.(	;		2_S	· · ·		  	•	· · ·	· ·	•	· · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	•		· ·	•	· ·	•	•
· ·	· ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	•	· · ·	r L L	αι	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · ·			a.,		<b>)</b>		•	E E E E E E E E E	· · ·	•	· · ·	•		· · ·		  	· · ·	•
••••		$\gamma + \epsilon$	2 9 e	 	. C	ον	s hi	10		fē	· •	• •		· ·	- 1	• •	• •	•	• •	•	· ·	•	•	· ·	•		· ·	•	· ·	•	•
· ·	• •	· •	· ·	· ·	· · ·	•	· ·	•	• •	• •	•		X j	E	· · ·	H	· ·	•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	•	•
· ·	• •	• •	• •	• •	• •	•	· ·	•	• •	• •		• •	• •	• •		• •	• •	•	• •		• •		•	••••	•	•	• •	•	• •	•	•
· ·		•	• •	· ·	· ·	•	· ·		• •	• •		• •	• •	• •	•	· ·	· ·	•	· ·		· ·		•	· ·	•	•	· ·		• •		•
· ·	• •	· •	· ·	· ·	· · ·	•	· ·		• •	• •	•	· ·	• •	• •	•	· ·	· ·	•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	•
• •		•		• •		•		•	• •	• •	•	• •		• •	•	• •	• •	•	• •	•		•	•		•		• •	•		•	•

Integer Linear Programming	· · · · · · · · · · · · · · · · ·
$x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}$	
linear inequalities	.       .
$\left\langle \alpha_{1}, \chi_{2} \right\rangle = \frac{1}{2^{-1}} \left\langle \alpha_{1}, \chi_{2} \right\rangle \leq \frac{1}{2^{-1}} \left\langle \alpha_{1}, \chi_{2} \right\rangle$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
integer constraints	· · · · · · · · · · · · · · · ·
$X_{j} \in \mathbb{Z}$	.       .
Linear optimization.	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$Find \qquad \qquad$	
·       ·	s.t. constraints,

Thin ILP is NP-Hard	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Pf. By reduction from Min WT VERTEX	$C_{2} \in \mathbb{R},$
Voniables	.       .
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Constraints	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Objective	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Thm ILP is NP-Hard
Pf. By reduction from MIN WT VERTEX COVER.
Vorviables per vertex ZXV: VEVJ
Xy indicates whether YEC or NoT.
Constraints
$X_{v} \in ZO_{1}V \subseteq V$
$X_{n} + X_{n} \geq 1$ $\forall f(u,v) \in E$ .
$\begin{array}{c} \underbrace{Objective}{\sum} & \underbrace{w_j}{\sum} & w_j$

Thm ILP is NP-Hard	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Pf. By reduction from Min WT VERT	$e \times C e k$
Vouriables per vertex ZXV: Ve	$\in \mathcal{N}$
Xy indicates who	ether VEC or NoT.
Constraints	$= \times \in \mathbb{Z}_{0} \setminus \mathbb{Z}_{0}^{h}$
$X_{v} \in ZO_{1}V = V$	-+-1  correspondence
$X_{u} + X_{v} \geq 1$ $\forall f(u,v) \in E$ .	= x is feasible for ILP =>
$\frac{Objective}{X} \qquad min \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot x_j$	S is a vertex cover, S ILP finds min mt, VC.

Integer Linear Programming	· · · · · · · · · · · · · · · · ·
$x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}$	
linear inequalities	.       .
$\left\langle \alpha_{1}, \chi_{2} \right\rangle = \frac{1}{2^{-1}} \left\langle \alpha_{1}, \chi_{2} \right\rangle \leq \frac{1}{2^{-1}} \left\langle \alpha_{1}, \chi_{2} \right\rangle$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
integer constraints	· · · · · · · · · · · · · · · ·
$X_{j} \in \mathbb{Z}$	.       .
Linear optimization.	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$Find \qquad \qquad$	
·       ·	s.t. constraints,

Integer Linear Programming	· · · · · · · · · ·
$x_1, x_2, \dots, x_n$	· · · · · · · · · ·
linear inequalities	· · · · · · · · · · ·
$\left\langle \alpha_{1}, \chi \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \chi_{j} \leq b_{i}$	.       .
integer constraint	· 2=.1
$X_{j} \in \mathbb{R}$	
Linear optimization:	.       .
Find $(C, X) = \sum_{j=1}^{N} C_{j} \cdot X_{j}$	
S.E. Co	instraints,

Linear Programming	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}$	$X_{j} \in \mathbb{R}$
linear inequalities	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$\left\langle \alpha_{1}, \mathbf{x} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{x}_{j} \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{x}_{j}$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
Linear optimization.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$Find$ $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{$	$ \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{$
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	s.t. constraints,
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	.       .

Linear Programming
variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ $X_j \in \mathbb{R}$
linear inequalities
$\left\langle \begin{array}{c} \alpha_{1}, \\ \gamma_{2}, \\ \gamma_{2} \end{array} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \\ \chi_{j} \leq b_{1} \\ \chi_{j} = 1 \\ \chi_{j} = 1 \\ \ddots \\ \ddots \\ \chi_{j} = 1 \\ $
Linear optimization.
$Find \qquad \qquad$
s.t. constraints,
Theorem Linear Programming EP.
See CS 6820

Linear Programming	is Usoful !
Ex. Max Flow vedu	-ces to linear Programmily
Variables	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	.
Constraints	.
	.       .
$\frac{Objective}{1}$	.       .

Linear Programming is Usoful!
Ex. Max Flow reduces to Linear Programmily
Variables ZfeieeEJ
Constraints $O \leq f_e \leq c_e$ $\forall e \in E$
$\sum_{e=(u,v)} f_e = \sum_{e'=(v,w)} f_{e'},  \forall v \in V \setminus \mathbb{Z} s_i \neq \S$
$Wax = \sum_{i=1}^{n} (s_i \times i)$

Linear Progr	ammile	is Usofi		.       .
Ex. Linear	Systems	Veduces	to Cinear	Programming
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Variables	· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · ·			
Constraints	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	·       ·
<u>Objective</u>	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	.       .	·       ·
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

Linear Progr	unity is Usoful!	•
Ex. Linear	Systems veduces to Linear Programming	•
Variables	$X_1 X_2 \in \mathbb{R}^2$	•
	.       .	•
	$-\langle a_{\hat{\lambda}_{1}}, x \rangle \leq -b_{\hat{\lambda}}$	•
<u>Objective</u>		•
.       .		•

Linear Programming Relax	a tish
Min Wt. Vertex Cover ILP	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Variables ZXV: VEV	
Constraints	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
XVEZOIL HVEV.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$X_{\mathcal{M}} + X_{\mathcal{M}} \geq 1$	$(v_1,v_2) \in (-, -)$
Objective	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
win $\sum w_j \cdot x_j$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$\tilde{\Sigma}$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Linear Programming Relaxation.
Min Wt. Vertex Cover JLP
Vouviables ZXV: VEVJ
Constraints
$\frac{X_{v} \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{V}^{-1}}{X_{v} \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{V}^{-1}} \qquad 0 \leq X_{v} \leq 1  \forall v \in \mathbb{V}$
$X_{n} + X_{n} \geq 1$ $\forall (u,v) \in \mathbb{C}$
Objective
$win \sum_{j=1}^{N} w_j \cdot x_j$
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i$
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Linear Programming Relaxation.
Min Wt. Vertex Cover ILP
Vaniables ZXV: VEVJ
Constraints
$X_v \in ZO_V \xrightarrow{V_v \in V} 0 \leq X_v \leq 1  \forall v \in V$
$X_{u} + X_{v} \geq 1$ $\forall (u_{i}v) \in E$ . Objective
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
Can we give a guavantee on the quality of LP solution for solving ILP?

Approximate VC On input G = (V, E). Construct 2 solve LP Vouviables ZXV: VEVG Linear Inequalifies  $0.00 \leq \times_{V} \leq 1.000 \forall V \in V$  $|X_{n} + X_{n}| \geq |V| + |V| + |V||$ Objective  $M_{1} = M_{1} + M_{1} + M_{2} + M_{1} + M_{1$ Ĵ= (

Approximate VC On input G = (V, E). Construct 2 solve LP Vouviables ZXV : VENJ Linear Inequalities |A| = |A| $X_{n} + X_{n} \ge 1$   $(u,v) \in E$ Objective  $M_{1} = M_{1} + M_{1$ Then, ROUND solution  $C = - \phi$  $Fov \quad v \in V$ .  $x \to (f \to f \times \sqrt{2})^{-1} \to \sqrt{2} + \sqrt{$ Return C

Theorem	Approximate VC	voturns a	2-approximate	

Theorem :	Approximate l	IC voturns a	2-approximate	$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·
Claim		vertex Cover.		· · · · · · · ·
				· · · · · · ·
· · · · · · · · ·				
		2. √vi <sup>★</sup> (° C <sub>1</sub> ), 1		· · · · · · · ·
		· · · · · · · · · · · · ·		
· · · · · · · · ·				
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·

Theorem Approximate VC voturns a 2-approximate VC	• •
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
Claim C is a vertex Cover.	
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}$	• •
	• •
$\implies$ at least one of $x_{1}, x_{2} \geq 1_{2}$	
$\Rightarrow$ at least spect of $\forall$ $\forall$ $\in$ C	
	• •
	• •
$(1)_{\alpha} : (1)_{\alpha} : (1)_$	
	• •
	0 0 0 0
	0 0
	• •
	0 0
	• •
<pre></pre>	

Theorem Approximate	VC voturns a	2-approximate VC
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	
<u>Claim</u> Cisa	vertex Cover.	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •
× For all edges	$(u,v) \in E$ $\times_{\sim} +$	$\times \mathcal{I} \geq \mathcal{I}$
	nt least one of	$\times_{\mathcal{I}},\times_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\sim} 1_{2}$
	at least one of	$[ \mathcal{M}, \mathcal{V} ] \in \mathbb{C} $
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$C_{10}$ $M$ $(C)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$W(c) = \sum w_j$	$\underbrace{1}\left[ \left( \begin{array}{c} \times_{j} \geq 1/2 \end{array} \right) \right]$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n$		.       .
$= 2 \cdot 2 $		.       .
$\overset{\circ}{}{}{}{}{}{}{}{$	T(VC-ILP)	$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{2} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}$