28 February 2025	Max Flow / Min Cut
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	& König's Theorem
Pan	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
* Complete proof of Max Flow / 1	Min Cuff and a second a second a
* Announcements	
* König's Theorem.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Consider an st - Cut of G.  $S \leq V = V \setminus S$ s.t. seS i tet. Capacity of an st-cut.  $Cap(S,T) = \sum_{uv \in E} C_{uv}$ uses, veT edges from S to T. S OF OF (+)Natural upper bound on FlowOut (s)  $\operatorname{val}(f) \leq \operatorname{Cap}(S, T)$ 

Theorem (Max Flow / Min Cut) For every flow network G, s,t, c. E-R<sup>+</sup> S OF T Finding a maximum flow is equivalent to finding a minimum st-cut.

Proof by Analysis of Ford-Fulkerson,
Lemma. For any flow $f$ and any $st-Cut S \leq V$ . val(f) = FlowOutf(S) - FlowIu(S)
Claim When FF terminates w/f, there exists st-Cut S,T such that
$\operatorname{val}(f) = F_{low}O_{n}f(S) = C_{n}p(S_{1}T)$

Lemma For any st-Cut. SEV. and any flow f.
val(f) = FlowOut(S) - FlowIu(S) = $\sum f_{uv} - \sum f_{vu}$
ues, vet vet
Intuition. Flows between u, u'ES "cancel"
Similar for viv'ET.
NLT Flow Crosses cut.
.       .

· ·	<u>ب</u>	<u>vv</u>	nc		F		· · ·	ÖUV	24	· · ·	St		C.	~+	  	•				•••	•	a	~d	· CA	m	· ·	fl.	500 500 6 6	£-	•
· · ·	· · ·	· · ·	•	•	· · ·		a.1		f				Z	). , ve	   		· · · · ·	•	· ·	Ve	2 T, v	- 	. (			· · ·		· · ·	· ·	
	• •	· · ·	al	· ) (	; ;f)	. 11		-			t (	s)	•	•	• •	•	• •	•	• •	• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	· ·	•
· ·	· ·	· ·	•	•	· ·	· 1/	Ţ	- 10	, ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,	On	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	S				2		۲ ۲ ۲ ۲	F	- ]or	~0	u † 1	(u)	· · ·	r F r	00	Ţν	ι (uj	) ) ) ) , , , , , , , , , , , , , , , ,	•
• •	• •	• •	•	•	• •		• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	•	• •	•	• •		· · ·	• •	•		$\sum_{i=1}^{n}$	4	- Cé	5205	ER	JAT	101	J.
				•		•												•							•		•			•
				•																										
	0 0																			• •	٠			• •				• •	• •	
			٠	•			• •						0		• •		• •									• •				
	• •			•	• •						• •		•						• •	• •	٠			• •				• •		
• •	• •			•	• •		• •						•		• •			٠		• •	٠			• •		• •	•	• •	• •	
						•												•												
• •	• •	• •		٠	• •	٠	• •		• •	• •	• •	• •	0	٠	• •	٠	• •	٠	• •	• •	٠	• •		• •	٠	• •	*	• •	• •	٠
	• •	• •		٠	• •	•	• •			• •	•	• •			• •	٠	• •	•	• •	• •		• •		• •		• •	•	• •		٠
• •	• •	• •	•	٠	• •	٠	• •		• •	• •	• •	• •	٠	•	• •	٠	• •	٠	• •	• •	٠	• •		• •	٠	• •	•	• •	• •	•
				•	• •	٠											• •	٠				• •		• •		• •		• •	• •	
• •	• •	• •			• •	٠	• •			• •	•	• •			• •	٠	• •		• •	• •	٠	• •		• •		• •		• •		٠
• •	• •	• •		٠	• •	٠	• •		• •	• •	• •	• •		•	• •	٠	• •	٠	• •	• •	٠	• •		• •	٠	• •	*	• •	• •	٠
	• •	• •	٠	٠	• •	•	• •		• •				۰		• •	•	• •	٠	• •			• •		• •	٠	• •	٠	• •	• •	•
	• •	• •			• •	٠	• •		• •		• •	• •	0	٠	• •	٠	0 0	٠	• •		٠	0 0	٠	• •	۰	• •	٠	• •		٠
• •	• •	• •		٠	• •	٠	• •			• •	• •	• •	٠	٠	• •	•	• •	*	• •	• •	٠	• •	•	• •	•	• •	•	• •		*
• •	• •	• •	٠	٠		٠	• •		• •	• •	• •	• •		•	• •		• •	٠	• •	• •	•	• •		• •	٠	• •	٠	• •	• •	٠
• •	• •	• •	•	•	• •	•	• •		• •	• •	•	• •	*	•	• •	•	• •		• •	• •	•	• •	•	• •	٠	• •	•	• •	• •	•

Lemma For any st-Cut. SEV. and any flow f.
$val(f) = \sum_{u \in S, v \in T} f_{uv} - \sum_{v \in T, v \in S} f_{vu}$
Pf. $val(f) = Flow Ort(s)$
= Flow Out (s) + Z (Flow Out (u) - Flow In (u)) UES 1759 OK CONSERVATION
$= \sum_{u \in S} \left( \sum_{u' \in S} f_{uu'} + \sum_{v \in T} f_{uv} - \sum_{u' \in S} f_{u'u} - \sum_{v \in T} f_{vu} \right)$
$= \sum_{u,u'\in S} (f_{uu'} - f_{uu'}) + \sum_{u\in S, v\in T} f_{uv} - \sum_{u\in S, v\in T} f_{uv}$
Flow that circulates w/in S

Claim	When FF termi	inates w/ f,	there exists
 	st-Cut S,T	such that	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	val(f) = Flow(	$O_{n} + \frac{f}{f} (S_{n}) = C_{n} C_{n}$	$ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1$
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
		· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	.       .
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		

Ford-Fulkerson Algorithm
Initialize fe = O HeeG.
Repeat. * Compute Gf the residual of current flow.
* if there exists an st-path in Gf - Push flow along path - Update flow f.
* if no st-path in Gf [- Return f To show. f witnesses a
uin cut.

Claim. When FF terminates w/f, there exists
$st-Cut = S_{1} + S_{2} + S_{3} + S_{4} + S_{$
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i$
$\sum_{i=1}^{n} (i + i) = \sum_{i=1}^{n} (i + i) $
lermination (ondition). No stripting in y
Define S=ZUEV: U is reachable from s Z in GFJ
T=V\S. Note: teT by termination
condition.
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Termination Condition: No st-path in G <sup>f</sup>	· · ·
Define S= ZUEV: U is reachable from s in Gf	
	• •
	· · ·
	· · ·
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i$	• •
	· · ·

Claim. When FF terminates w/ f, there exists
St-Cut. St. Cut. S. Cuch. That.
$\operatorname{val}(f) = f(\operatorname{out}(S)) = \operatorname{Cap}(S,T)$
Define S= ZUEV: U is reachable from s Z in GFJ
We show .
$AuesiveT = C_{uv}$
$\forall v \in T, u \in S$ : $\int_{vu} = 0$ .
establisher the Claine above.

Define $S = 2$ use $V_{1}$	" Mis reachable from s 7
	Suppose $uv \in E$ , Claim, $= C_{uv}$ .
$ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\$	P.F. Suppose for < Curr.
	$ = C_{\alpha \nu} - f_{\alpha \nu} > 0 $
	reachable from u.
·       ·	

Define $S = Z U \in V$	U is reachable from s 7
	Suppose $vu \in E$ , Claim $f_{vy} = 0$
$ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} $	$Pf: Suppose f_{vu} > 0$
	contradicting v not reachable from u.
.       .	.       .
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Termination Condition: No st-path in Gt S Yues, vet Lovert, oue os . \_... fur - 2 vet, ues  $f_{vs}$  $C_{uv} = C_{ap}(s_{u}T)$  $\frac{1}{2}$ ues, vet

• •	S		Ma	.vy	· ·	•		•	••••	••••	•	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •		•	•	• •	•	•
• •		Fo	, , , , √, ,			1.	· · ·	-1		÷	•			L L	•			) .	 	t-	 - ح	i-t	 	. (			-	•	• •	•	•
•	· · ·	• •	••••	•	• •	•	• •	•			· ·		•			· · ·	י ג ר	1	· · · · ·	•	• •	•	••••	•	•		•	•		• •	•
• •	· · ·	· ·		•	• •	•	• •		(al	. (†	- ); ;	· / ·			ap.	·		. (	· · ·) · · ·	•	• •	•	• •	•	• •	· •	•	•	• •	•	•
•	· · ·	· ·	· ·	•	• •	•	· ·	•	· ·	••••		•••	•	•••	•	· ·	•	•	• •	•	• •	•	· ·	•	•		•	•	· ·	•	•
•	· · ·	· ·	· ·		• •	•	· ·		• •	· ·		· ·	•	••••	•	· ·		•	· ·	•	· ·		· ·		•		•	•	· ·	•	•
• •	· · ·	· ·	· ·	•	• •	•	• •	•	• •	· ·	•	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •		•	•	• •	•	•
• •	· · ·	· ·		•	• •	•	• •	•	• •	•••	•	• •	•	•••	•	•••	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •		•	•	• •	•	•
• •		• •	· ·		· ·	•	· ·	•	• •	· ·	•	• •	•	••••	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·		• •		• •		•	•	· ·	•	•
• •		• •	• •	•	• •	•	· ·	•	• •			· ·	•	••••	•	· ·	•	•		•	· ·	•	· ·	•	• •		•	•		•	•
• •		• •	• •	•	• •	•	· ·	•	• •			· ·	•	••••	•	· ·	•	•	• •	•	· ·	•	· ·	•	• •		•	•	· ·	•	•
• •	· · ·	· ·	••••	•	• •	•	· ·	•	• •		•	• •	•	••••	•	••••	•	•	• •	•	· ·	•	· · ·	•	• •	· ·	•	•	· ·	•	•

Summary.	·       ·
× For any from	found any st-cut S,T
val	$2(f) \leq Cap(S, T)$
* Ford - Fulkerson	terminates ~/ a flow f* s.t. J st-cut S*, T*
	$(f^{*}) = (C_{*} f^{*}) = (C_{*} f^{*} f^{*})$
.       .	.       .
.       .	.       .
·       ·	.       .
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Sumary,
× For any fin f and any st-cut S,T
$vaQ(F) \leq Cap(S, T)$
* Ford-Fulkenson terminates ~/ a flow f* s.t. I st-cut S*, T*
$\operatorname{val}(f^*) = \operatorname{Cap}(S^*, \mathcal{T}^*)$
* Implies both: => Ford-Fulkerson is correct.
$\implies Max - Flow = Min - Cut.$

Summary. \* Ford - Fulkeuson terminates in  $\leq$  val  $(f^*)$  iterations  $\implies \mathbb{R}^{+} = \mathbb{R}^{+$ pseudopolynomial" => To be polynomial we need that capacifies are bounded polynomially. Edwords-Karp / Dinic juplemente to that vens in polynomial time

Announcements	· · · · ·
* HW 3 orgeving	· · · · ·
La Ask on Ed for suggestions on programming pr	-oblem
> Emphasis is on reductions	
, Two directions	
$(\Rightarrow)  \text{if } A \text{ her solut} \Rightarrow R($	A) has solu.
* Recitation on Schurday ((=) if R(A) has solin =) A	they rolu
1 ractice trobally	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
* AWZ Grades released shorthy	
District Clifferent at the	
& Frehm IFI solutions released shorting	

Kónig's Theorem. <- Key application of Max Flow / Min Cut
Defn. Given an undirected graph $G = (V, E)$
$\alpha  \forall ev + e \times  Cover  C \leq V  is  \alpha$
collection of vertices s.t.
for every edge (u,v) EE
$\mathcal{U} \in \mathcal{C}  \mathcal{OR}  \mathcal{V} \in \mathcal{C}$
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

König's Theorem. <- Key application of Max Flow / Min Cut
Defn Given an undirected graph $G = (V, E)$ a Vertex Cover $C \subseteq V$ is a collection of vertices s.t. for every edge $(u,v) \in E$ $u \in C$ OR $v \in C$
$\frac{2}{5}$ $C = V$

König's Theorem. <- Key application of Max Flow / Min Cut
Defn. Given an undirected graph $G = (V_1 \in )$ a Vertex Cover $C \in V$ is a collection of vertices s.t. for every edge $(u,v) \in E$ $u \in C$ OR $v \in C$ .
Non-trivial VC Small C.

König's Theorem $(i = (V, E))$ .
The candinality of a vertex over
equals
maximum cardinality of a matching
$ \cdot \cdot$

König's T	Leoren I	n bipartite	graph	
· · · · · · · · · ·	$\frac{1}{\sqrt{C}}$	- Max matchi		· · · · · · · · · · · · ·
.       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .	· · · · · · · · · · · · · · ·		  	· · · · · · · · · · · · · ·
.       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .	· · · · · · · · · · · · · · ·		  	· · · · · · · · · · · · · ·
.       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .	· · · · · · · · · · · · · · ·		 	· · · · · · · · · · · · · ·
.       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .	· · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · ·	

König's Theorem. In	bipartite graph G,
$m(n) = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac$	= max [M] matching
Easy Direction Mi	$N (C) \geq max (M)$
Pf by picture	$ \begin{array}{c} \cdot \cdot$
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	C unst have at least one endpoint of every eEM
.       .	<ul> <li></li></ul>

König's Theorem. In bipartite graph G, min (C) = max (M) Easy Direction min ICI > max IMI vc VC matching IMI Pf. Consider any vertex vEV. Adding v to C covers at most 1 edge from M (as it is a matching).

In bipartite graph G König's Theorem = max [M]  $= m \left( \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \right) \right)$ . <u>VC</u>. . . . . Easy Direction min (C) > max (M) vc (C) > matching Pf. Consider any vertex veV. Adding v to C covers at most 1 edge from M (as it is a matching). To cover every edge in E, must cover every edge in M, > Must use at least (M) vertices.

König's Theorem. In bipartite graph G, min [C] = max [M] vc. vc. vc. vc. matching min ICI < max vc Hand Direction Reduce Matching to Flow

König's Theorem. In bipartite graph G = max [M] matching win ICI & max vc Hand Direction Reduce Matching to Flow  $cap + \infty$ cap = |cap=1 S 

win max M Hand Direction matchile cap +00 Cap= cap = |(f)ક By too edge capacity No u->v edges from U

vin ICI < max IMI Hand Direction  $cap + \infty$ cap=1 cap = |  $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i$ By +00 edge capacity No u->v edges from UNS -> VAT  $\begin{array}{c} \text{Consider} & \text{c} & \text$ C is VC: Every edge in G adjacent to NEVAS

max M/ matching Hand Direction cap +00 cap= cap = |  $\rightarrow$   $\rightarrow$   $\rightarrow$   $\rightarrow$  (+)By too edge capacity No u >v edges from UNS -> VAT  $\begin{array}{c} \text{Consider} & \text{C} & \text{$ |C| = Cap(S,T) = val(f) = |M|By earlier reduction.