| 19 February 2025 | Flow Networks |
|---------------------------------------|---|
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| P(an) | |
| * Flow Problem | <td< td=""></td<> |
| * Announcements | . . |
| | |
| * Max Bipartite Matching: Re | duction to Flow, |
| * Max Bipartite Matching: Re | duction to Flow, |
| * Max Bipartite Matching: Re | Auction to Flow, |
| * Max Bipartite Matching: Re | Auction to Flow, |
| * Max Bipartite Matching : Re | Auction to Flow, |
| * Max Bipartite Matching : Re | Auction to Flow, |

Maximum Bipartite Matching Given, Bipartite Graph on vertices UUV Every edge in E has exactly 1 endpoint in U and V.

Maximum Bipartite Matching Bipartite Graph on vertices UUV aiven. Every edge in E has exactly 1 endpoint in U and V. Find. Maximum Cardinality Matching MCE Collection of edges s.t. every vertex is in at most one edge.

Maximum Bipartite Matching Bipartite Graph on vertices UUV aiven. Every edge in E has exactly 1 endpoint in U and V. Find. Maximum Cardinality Matching MCE Collection of edges s.t. every vertex is in at most one edge.

| | Quest | , | · · · · | · · · · | · · · · | · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · | |
|---------|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|-------|-----------|-------------|-------------------|---------------------------------------|--------|
| · · · · | How | | | find | · · · · · | feas | ible | match | îvej M | | |
| | How | Carr | Ŵ | Cer | / tifej | | | best | possible | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · | · · · · | · · · | · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · · | 1 2 |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · | · · · · · | · · · · | · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · | |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · | · · · · · | · · · · | · · · | · · · · · | · · · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · | |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · | · · · · · | · · · | · · · | · · · · · | · · · · · | | · · · · · · · · · · | 1 2 |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · | · · · · · | · · · · | · · · | · · · · · | · · · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · | , |
| · · · · | · · · · · | | · · · | · · · · · | · · · · | · · · | · · · · · | · · · · · | | · · · · · · · · · · | |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · | · · · · · | · · · · | · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · · · · · | | |

| | Quest | 20 NS | | | | · · · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · | |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------------|---|
| X . | How | | we fi | ind a | feasible | match | ine ME | | |
| -¥ | How | Can | | certify | M îs | best | possible? | · · · · · · · · · · | • |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · | | · · · · · · · · | · · · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · · | |
| · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · | Answer | <u>/</u> S | · · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · | • |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · | Rel | Luction | Lo Ne | twork Flow | J | • |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · · · | · · · · · · · | · · · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · · | • |
| · · · | · · · · · | | · · · · · | | | · · · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · | • |
| · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · | | | · · · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · | |
| · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · | · · · · · · · | | · · · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · | • |

Network Flow Problem. Given. Directed graph $G_{i} = I(V_{i} \in I)$ Source vertex S Sink vertex E Edge capacities Cezo VeEE Source How which can (S) ¹ --flow twongh G? A A SINK

Network Flow Problem. Flow * Assigns quantity $f_e \ge 0$ to each edge. Source (\mathbf{r}) Ð

| Network Flow Problem. | · · · · · · |
|---|-------------|
| $F_{\rm F}$ low $f_{\rm F}$ | · · · · · · |
| * Assigns quantity | · · · · · · |
| to each edge. | · · · · · · |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | · · · · · · |
| Source | · · · · · · |
| | · · · · · · |
| | · · · · · |
| $\forall e \in E$ | · · · · · · |
| $\int_{e} \int_{e} \int_{e$ | |
| Edge capacity constraints | |

| Network Flow Problem | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
|--|--|
| F = 10 m f | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| × Assigns quantity fe 20 | Vertex Conservation constraints |
| to each edge, | HVEV ZZS, tZ |
| Source | Flow In(v) = Flow Ont(v) |
| $\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | $\sum_{uv \in E} f_{uv} = \sum_{vw \in E} f_{vw}$ |
| | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ |
| $f_{\sigma N} + f_{b N} = f_{V + b}$ | E Sink |

| Network Flow Problem. |
|---|
| × Given Flow Networke G, s,t, c:E→R ⁺ |
| \star Find Flow $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ subject to |
| Capacity Constraints Of |
| $O \leq f_e \leq C_e$ $\forall e \in E$ |
| Conservation Constraints |
| $\sum_{uv \in E} f_{uv} = \sum_{vw \in E} f_{vw} \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$ |
| $f_{\alpha\nu} = f_{\nu} + f_{$ |
| f_{cv} |
| |
| |

| Network Flow Problem. |
|---|
| \rightarrow Given Flow Network $G, s, t, c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ |
| \star Find Flow $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ subject to |
| Capacity Constraints Of Ce |
| $O \leq f_e \leq C_e$ $\forall e \in E$ |
| Conservation Constraints |
| $\sum_{uv \in E} f_{uv} = \sum_{vw \in E} f_{vw} \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$ |
| Flow In for Flow Out for fre Flow Out |
| Max Flow. Find Flow ft that maximizes Flow Out (s) |

| Announcements | · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · |
|---|-----------|-------------------|---------------------|-------------------|
| * Welcome Back - | - No | Homework | this we | |
| * Grading Ongoing | · · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · | · · · · · · · · · |
| La Prelim 1 | | | | |
| HW2 + + + + + + + + + + + + + + + + + + + | | | | |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · | · · · · · · · · · |
| | | | | |
| | | | | |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | | · · · · · · · · · | | · · · · · · · · · |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | | | | |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | | · · · · · · · · · | | |

| Network Flow Problem. |
|---|
| $ + Given Flow Network G, s, t, c: E \to \mathbb{R}^+ $ |
| \star Find Flow $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ subject to |
| Capacity Constraints $0 \leq f_e \leq c_e$ $\forall e \in E$ |
| Conservation Constraints Z fur = Z from Hve V ZS, tg |
| |
| 2 |
| |
| $(S) \xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{3} 0$ |
| |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |

| \star Given Flow Networke G, s,t, C: E $\rightarrow \mathbb{R}^+$ \star Find Flow f: E $\rightarrow \mathbb{R}^+$ subject to | · · |
|---|-----|
| Capacity Constraints $0 \leq f_e \leq c_e$ $\forall e \in E$ | · · |
| Conservation Constraints Z fur = Z from HreV 175,t | |
| | |

| Network Flow Problem. |
|---|
| $+$ Given Flow Networke G, s,t, c: E $\rightarrow \mathbb{R}^+$ |
| \star Find Flow f: E $\rightarrow \mathbb{R}^+$ subject to |
| Capacity Constraints $0 \le f_e \le C_e$ $\forall e \in E$ |
| <u>Conservation Constraints</u> $\sum_{uv \in E} f_{uv} = \sum_{vw \in E} f_{vw}$ $\forall v \in V \setminus zs, tz$ |
| 2 |
| $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ |
| (s) (z) |
| |
| |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| |

Network Flow Problem. * Given Flow Networke G, s,t, c:E -> R+ * Find Flow f: E > Rt subject to Capacity Constraints $O \leq f_e \leq 1$ Ye E E Conservation Constraints $\sum_{uv \in E} f_{uv} = \sum_{vw \in E} f_{vw} \quad \forall v \in V \setminus zs, tz$ 2. .

| Network Flow Problem. | · · · · · · · · · · · · · |
|--|---|
| \star Given Flow Networke G, s,t, c: E $\rightarrow \mathbb{R}^+$ \star Find Flow f: E $\rightarrow \mathbb{R}^+$ subject to | . . |
| Capacity Constraints $0 \leq f_e \leq c_e$ | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ |
| <u>Conservation</u> <u>Constraints</u> <u>Z</u> f _{uv} = <u>Z</u> f _{vw} uvee f _{vw} = vwee | $\forall v \in V \setminus zs, tz$ |
| $\frac{1}{200} = \frac{1}{200} = \frac{1}$ | |
| (S) (S) (Z) | |
| | |
| . | . . |

| Network Flow Problem. | · · · · · · · · · · · · · |
|---|--|
| $+$ Given Flow Network $G, s, t, c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ | |
| \star Find Flow $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ subject to | · · · · · · · · · · · · · |
| Capacity Constraints $0 \leq fe \leq ce$ | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ |
| <u>Conservation Constraints</u> Z fui = Z from | Yv∈V \Zs,tJ |
| | · · · · · · · · · · · · · |
| | · · · · · · · · · · · · · |
| $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | |
| $\sum_{n=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} \sum_{n$ | |
| | |
| | l |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | |
| | |

Network Flow Problem. * Given Flow Networke G, s,t, c:E -> R+ * Find Flow f: E > Rt subject to Capacity Constraints $O \leq f_{e} \leq 1$ He EE Conservation Constraints $\sum_{uv \in E} f_{uv} = \sum_{vw \in E} f_{vw} \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$ 200 200 $\left(\begin{array}{c} s \end{array} \right)$ \overline{t} 200 200 200

| Network Flow Problem. |
|--|
| \neq Given Flow Networke G, s,t, c: E $\rightarrow \mathbb{R}^+$ |
| \star Find Flow $f: E \rightarrow R^+$ subject to |
| Capacity Constraints 0 ≤ fe ≤ Ce HeEE |
| Conservation Constraints Z fur = Z from HreV 175, tj uvee rwee |
| $Ma_{X}Flow$ |
| la Fundamental Problem |
| Lo Many problems can be phrased as MF. |
| i.e. Many problems Reduce to MF. |

Maximum Bipartite Matching Bipartite Graph on vertices UUV aiven. Every edge in E has exactly 1 endpoint in U and V. Find. Maximum Cardinality Matching MCE Collection of edges s.t. every vertex is in at most one edge.

Reducing Max Bipartite Matching to Max Flow * Reduction is an algorithm R. · · · · Bipartile Matchile instances MaxFlow instances

Reducing Max Bipartite Matching to Max Flow * Reduction is an algorithm R. · · · K· · Bipartile Matchilly instances Max Flow instances F(W) NetworkR(B) = (q, s, t, c)B = (u, v, E)R(B)

Reducing Max Bipartite Matching to Max Flow * Reduction is an algorithm R. · · · · K· · <u>l</u>. . . ·/· · · · Bipartile Matching instances Max Flow instances R(B) * Requirements. Max Matching in B = kMax Flowin R(B) = K

Reducing Max Bipartite Matching to Max Flow * Reduction is an algorithm R. R. . . . · · · · · · · · · . e e e <u>M</u>e e e e e Bipartife Matching instances Max Flow instances R(B). * Requirements. (⇒) If B has a matching M s.t. [M] ≥ k then max flow in R(B) is at least k.

Reducing Max Bipartite Matching to Max Flow * Reduction is an algorithm R. · · · · · R· · · · · · · · · · a a <u>A</u>a a a a Bipartite Matching instances Max Flow instances R(B)* Requirements. (⇒) If B has a matching M s.t. [M] ≥ k then max flow in R(B) is at least k. (E) If R(B) has max flow at least k, then B has a matching M s.t. IM/ 2 k

| Reduction | · · · · · · · · · · · · · | <pre></pre> |
|---------------------------------------|-----------------------------------|---|
| On input B = | $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \in)$ | · · |
| Construct G | on vertices | $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{Z} s_i t_j$ |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · · · | · · |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · · · | . . |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| | | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| | | |
| | | |
| | | |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | E E | / |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | | $\int \cdot \cdot$ |

Reduction On input B = (U, V, E)G on ventices UUVUZSItg Construct L, For every (u,v) EE, add directed edge to G w/ capacity Cuv = (C = 1 0 \mathcal{O} \mathcal{O} Ð Ś 0 **X** Ġ

Reduction On input B = (U, V, E)Construct G on vertices UUV uzsitg -> For every (u,v) EE, add directed edge to G w/ capacity Cuv = 1 + For every uell, add (s,u) to G w/ cap Csu= · · · C = · [60 Ce = 1 Source SE Ð \rightarrow 20

Reduction On input B = (U, V, E)Construct G on vertices UUVUZs,tg -> For every (u,v) EE, add directed edge to G w/w = 1For every uell, add (s,u) to G w/ cap Csu= -) For every veV, add (v,t) to G w/ cap Cut = 1 Cp=1 $R^{(B)}$ €<u></u>0-1 $C_e = 1$ Sink D ->0-20

Max Bipartite Match Algo On input B = (U, V, E)Run Reduction to Max Flow R(B) Compute k ~ Max Flow (R(B)) Return k. // Returns cavdinality of Max Matching in B.

Max Bipartite Match Algo On input B = (U, V, E)Run Reduction to Max Flow R(B) Compute $k \leftarrow Max Flow(R(B))$ Return K. // Returns cardinality of Max Matching in B. Time of Reduction -> O(|U|+|V|+|E|) Running Time. - Time to Solve Max Flow + MF(O(n),O(m+n))Nodes) l'édges

Proof of Correctness. * Need to show Max Matching in B = kMax Flow in R(B) =* What can we leverage?

Proof of Correctness. * Need to show Max Matching = kMax Flow in R(B) = k* What can we leverage? > they in at most one pair Defin of Matching LP Flow constraints $\forall e \in \bigcirc$ CAPACITY - $0 \leq f_e \leq c_e$ CONSERVATION -> Flow In (v) = Flow Out (v) YVEV La Properties of Reduction R

| Proof of | Correctness. | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
|---|---|---|
| To show. (\Rightarrow) If | B has a matching then max flow | M s.t. $ M \ge k$, in $R(B) \ge k$. |
| | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ |
| | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | $ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ |
| | | |
| | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | |
| | . . | . . |

Proof of Correctness To show. has a matching M s.t. [M] = k (\Rightarrow) If B then max flow in R(B) = le $\nabla_{\mathbf{I}}$ Ŝ, Va

Proof of Correctness To show. has a matching M s.t. [M] = k, (\Rightarrow) If B then max flow in R(B) Z le. . Ma

| (\Rightarrow) If B has a matching M s.t. $ M \ge k$, |
|--|
| then max flow in R(B) Z le. |
| Consider routing 1 unit of flow along each matched edge $(u,v) \in M$ |
| For all $(u, v) \in M$ |
| $f_{su} = f_{uv} = f_{vt} = 1$ |
| For all other edges fe = 0 |
| |
| We show that f is a feasible flow |
| that voutes le units |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| |

| (\Rightarrow) If B has a matching M s.t. $ M \ge k$, |
|---|
| then max flow in R(B) Z le. |
| Consider routing 1 unit of flow along each matched edge (u,v) E M |
| By defn. of matching, |
| uell and vell involved in at most 1 matched edge |
| $\implies \forall u \in \mathcal{U} Flow I_n(u) \leq 1 \qquad \& \forall v \in \mathcal{V} Flow O_v f(v) \leq 1$ |
| |
| $ \begin{array}{c} \end{array} $ |
| |
| $\implies F[\omega, \psi, 0] = k.$ |
| |

| (\Rightarrow) If B | has a mat | ching Ms. | $t. M \ge k,$ | |
|---|----------------|---------------------------|---------------------------|-------------|
| the second se | en max- | flow in ? | $R(B) \geq L$. | · · · · · · |
| Consider vontice | 2 1 unit of | Flow along | each matche edge (u,v) | |
| By detr. of u | atching, | | | |
| uell and wer | l involved in | at most | 1 matched | edge |
| \Rightarrow \forall ue \mathcal{V} | Flow In (y) < | | | , v). ≤ 1 |
| · · · · · · · · · · · · · · · | | | | · · · · · · |
| | | | | |
| | | | · · · · · · · · · · · · | · · · · · · |
| · · · · · · · · · · · · · · | | | · · · · · · · · · · · · | · · · · · · |
| Flow Out (| (s) = k | | | · · · · · · |
| >> Capacity | constraints on | $(3) \longrightarrow (1)$ | | |

| (⇒) If | B has | CL MC | tching | | s.t. (M | $M \geq k$ | | · · · |
|---|--------------------|-------------|--|---------------------------------------|-----------------|--------------|------------|---------|
| | then | Max | flow | ĩn | R(B) | Zle | | · · · · |
| By defn. of | nting 1 Matchie | Unit 10 | F Flow | | eac eac | h mat | $r,v) \in$ | |
| ueU and | veV inv | olved | in at | MoS | <u>,+</u> 1 | match | ed e | deje |
| | V Flow- | In (4) | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | | | F low C |)~f(v) | |
| | | Ce = 1 | $C_{e} = $ | (e = 1) | | | · · · · · | · · · · |
| Each edge | exists | | | Cap 2 2 | acity Flow | is con | Sevve | d |
| · · | · · · · · · · · | · · · · · · | · · · · · · · · | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | · · · · · · · · | | · · · · · | |

| (⇒) If | B has | a ma | tching | M. s.t. | $ M \geq 1$ | le, | · · · · · |
|--------------|----------|-----------|---|---|------------------|---------------------------------------|-----------|
| | then | max | flow | in RC | \mathbb{R}^{2} | le, | · · · · |
| Consider vou | fice 1 | unit of | F : Flow | along e | ach u edge | ratchec (u,v) | |
| By defn. of | matchin | | | | · · · · · · | | |
| ueU and | veV inv | olved i | n at | most | 1 mat | rched | edge |
| ÷ Hue | V Flow | In (4) | $\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \int$ | & Hve | V. F. | | |
| | | $2e^{-1}$ | $C_{e} = 1$ | $\begin{array}{c} c \\ c$ | | · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | |
| Each edge | exists 1 | | $S \xrightarrow{1}$ C | Capacity & Flow | | | ved . |
| CAPAC | | JSERVATI | 0 N | | s feasile | | · · · · · |

Proof of Correctness To show. (\in) If max flow in R(B) Zthen max matching in \geq kS

Proof of Correctness To show. (\in) If max flow in R(B) then max matching in >.le V₂ S ່ປຯ

| Proof of | Correctness. | · · · · · · · · · · · · | · · · · · | · · · · | · · · · · · · · |
|---|---|---|-----------|-----------|---|
| To show. (\Leftarrow) If | max flow in then max | R(B) Z L Matching | | | |
| . . | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | | | |
| | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | $ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | · · · · · | | |
| | | | · · · · · | · · · · · | |
| | | | · · · · · | · · · · · | |
| | . . | | · · · · · | · · · · · | |

| (=) If max flow in R(B) Z k, |
|---|
| then max matching in B 2 le. |
| Fact. If all capacities are integer, ∃ a max flow s.t. feEN HeeG |
| Consider such an integral max flow f |
| \Rightarrow By capacifies \Rightarrow fe ezong \forall eeG |
| La let $M = Z(u,v)$: ue V , ve V and $f_{uv} = 1$. |
| |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| We prove M is a matching [M] Zk. |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| |
| |
| |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |

| Let $M = Z(u,v)$ | | $and - \frac{1}{nv} = 1$ | |
|---|---|---|---|
| <u>Claim</u> . Mis a <u>Pf</u> . By construct * every ue U * every ve V | has exactly has exactly | one in-edge one out-edge | of $cap = 1$ of $cap = C_{vt} = 1$ |
| $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | $\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | $ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$ | . |
| . . | . . | . . | . . |
| . . | | . . | . . |
| | | | · · · · · · · · · · · · · |

| Let $M = Z(u,v)$: uell, vell and $f_{uv} = 1$. |
|---|
| Claim. M is a matching. Pf. By construction in Reduction R * every use U has exactly one in-edge of cap csu=1 * every VE V has exactly one out-edge of cap cvt=1 |
| $\begin{array}{c} 1 \\ \hline \\$ |
| By conservation constraints. |
| ⇒ At most 1 unit of flow out of every neU ⇒ At most 1 unit of flow into every veV. |
| |

| Let $M = Z(u,v)$: $u \in U$, $v \in V$ and $f_{uv} = 1$. |
|---|
| <u>Claim</u> . M is a matching. <u>Pf</u> . By construction in Reduction R * every use U has <u>exactly</u> one in-edge of cap c _{su} =1 * every VE V has <u>exactly</u> one out-edge of cap c _{vt} =1 |
| $\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\$ |
| By conservation constraints. |
| \Rightarrow At most 1 unit of flow out of every NEU \Rightarrow At most 1 unit of flow into every NEV. |
| => Every nell and veV involved in at most one edge in M/ |

| Let $M = Z(u,v)$: uell, vell and $f_{uv} = 1$ Z | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| \underline{Claim} . $ M = k$ | | | | | | | | | | | | | | |
| Pf Consider the cut in G, S = ZSJUU | | | | | | | | | | | | | | |
| $ \begin{array}{c} & & & \\ & $ | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | | | | | | |
| · | | | | | | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | | | | | | |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · | | | | | | | | | | | | | | |

| Let $M = Z(u,v)$: uell, vell and $f_{uv} = 1$ |
|---|
| \underline{Claim} , $ M = k$ |
| Pf. Consider the cut in G, S=ZSJUU |
| |
| Note. No edges are oriented into S \implies Flow Out(s) = k = Flow out of S |
| = Flow from LEV to VEV |
| 1 |
| · · · · · · · · · · · · · · · · · · · |

| Let $M = Z(u,v)$: $u \in U$, $v \in V$ and $f_{uv} = 1$. |
|--|
| \underline{Claim} . $ M = k$ |
| Pf. Consider the cut in G, S=ZSJUU |
| |
| Note. No edges are oriented into S |
| \implies Flow Out(s) = k = Flow out of S |
| = Flow from LE V to VEV. |
| By integrality of $f_e \in 20, 13 \implies k$ edges have non-zero flow from U to V. |
| $\implies M \mid = k$ |

| | • | • | | • | ٠ | • | | • • | • | | | ٠ | • • | • | • | ٠ | | | ٠ | | ٠ | • • | ٠ | • | • • | | ٠ | • • | ٠ | ٠ | | ٠ | ٠ | • | • • | ٠ | ٠ | • |
|---|---|---|-----|-----|---|---|---|-----|---|---|---|---|-----|---|---|---|-----|-----|---|---|---|-----|---|---|-----|-----|---|-----|---|---|-----|---|---|---|-----|---|---|---|
| • | • | ٠ | | • | | ٠ | ٠ | • • | * | ٠ | • | • | • • | ٠ | ٠ | ٠ | | • | ٠ | * | | | | • | | | ٠ | | | ٠ | | ٠ | | • | • • | | | • |
| ٠ | ٠ | | | • | | | | • • | ٠ | | | | • • | | ٠ | | | | | | | • • | | | | | 0 | • • | | | | ٠ | | ٠ | • • | | | • |
| | ٠ | • | | • | • | ٠ | | • • | ٠ | | ٠ | | | | ٠ | | | • | ٠ | ٠ | • | • • | | ٠ | | • | ٠ | | | | | ٠ | ٠ | ٠ | • • | | ٠ | |
| | • | • | | • | • | | • | | | | ٠ | | | | ٠ | • | | • | | | • | | | ٠ | | • | | | | | | | ٠ | | | | • | • |
| • | • | • | • • | • | | | | • • | | | | | • • | | | | • • | • | | | • | | | | | • | | | | | | | | • | | | • | • |
| • | | ٠ | | • • | | • | ٠ | • • | • | ٠ | • | ٠ | • • | ٠ | • | ٠ | • • | • | • | • | • | | | | | • | • | • • | | ٠ | | • | | • | • • | ٠ | * | • |
| • | • | | • • | • | • | ٠ | ٠ | • • | ٠ | ٠ | • | ٠ | • • | ٠ | ٠ | ٠ | • • | • | ٠ | ٠ | • | • • | • | • | • • | | ٠ | • • | ٠ | ٠ | • • | ٠ | | ٠ | • • | ٠ | | • |
| • | ٠ | • | | • | | ٠ | | • • | ٠ | | ٠ | | • • | | ٠ | | | | ٠ | ٠ | • | • • | • | ٠ | | • | | • • | | | | ٠ | ٠ | ٠ | • • | | | • |
| • | • | ٠ | | • | ٠ | ٠ | • | • • | * | | ٠ | • | • • | | ٠ | ٠ | | • | ٠ | ٠ | ٠ | • • | • | ٠ | | • | ٠ | • • | ٠ | • | | * | ٠ | • | • • | | ٠ | • |
| ٠ | • | • | | • | • | | • | | • | • | • | • | • • | | | • | | • | | | | | | • | | • | • | • • | | | | | | • | • • | • | • | • |
| ٠ | • | • | • • | • • | | • | • | • • | • | • | | | • • | • | ٠ | • | • • | • | • | • | • | | | • | • • | • | • | | | | | ٠ | | • | • • | • | • | • |
| • | | • | • • | • • | | • | ٠ | • • | • | ٠ | | ٠ | • • | ٠ | | ٠ | • • | • | ٠ | • | • | • • | | | | • | ٠ | • • | | ٠ | • • | • | | • | | • | * | • |
| • | • | | • • | • | • | ٠ | | • • | ٠ | ٠ | • | ٠ | • • | ٠ | ٠ | | • • | • | ٠ | ٠ | • | • • | ٠ | ٠ | • • | • | ٠ | • • | ٠ | ٠ | • • | ٠ | | ٠ | • • | ٠ | | • |
| ٠ | ٠ | • | | • | ٠ | ٠ | • | • • | ٠ | • | ٠ | • | • • | • | ٠ | • | • • | • | ٠ | ٠ | • | • • | • | ٠ | • • | • | ۰ | • • | • | • | | ٠ | ٠ | ٠ | • • | • | ٠ | • |
| ٠ | • | • | | • | • | • | • | • • | ٠ | • | ٠ | • | • • | | ٠ | • | | • | • | | • | | • | ٠ | | | | • • | • | • | | ٠ | ٠ | • | • • | • | ٠ | • |
| ٠ | | • | • • | • | | ٠ | ٠ | • • | | ٠ | | ٠ | • • | ٠ | | | • • | • | ٠ | • | ٠ | • • | | | • • | • | ٠ | • • | | ٠ | • • | • | | • | • • | ٠ | | • |
| ٠ | | ٠ | • • | • | | • | ٠ | • • | • | ٠ | • | ٠ | • • | ٠ | • | • | • • | • | • | • | • | • • | | • | | • | • | • • | | ٠ | • • | • | • | • | • • | ٠ | * | • |
| ٠ | ٠ | | • • | | ٠ | | ٠ | • • | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | • • | ٠ | ٠ | | • • | | ٠ | | * | • • | ٠ | ٠ | • • | | ٠ | • • | ٠ | ٠ | | ٠ | ٠ | ٠ | • • | ٠ | | • |
| • | ٠ | • | • • | • | ٠ | | | • • | ٠ | • | | • | • • | • | ٠ | | • • | | ٠ | | • | • • | • | ٠ | • • | | ۰ | • • | • | • | | ٠ | ٠ | ٠ | • • | | | • |
| • | ٠ | • | • • | • | • | ٠ | • | • • | * | • | ٠ | • | • • | • | ٠ | * | • • | • | ٠ | ٠ | • | • • | • | ٠ | | | ٠ | • • | • | • | | ٠ | ٠ | • | • • | • | ٠ | • |
| ٠ | • | • | | | • | | • | • • | • | • | • | • | • • | • | | • | | • | | | • | | • | * | | • | • | • • | • | • | | | ٠ | * | • • | • | • | • |
| • | | • | • • | • | | ٠ | • | • • | • | ٠ | | ٠ | • • | ٠ | • | ٠ | • • | • | ٠ | • | ٠ | • • | | | • • | • | ٠ | • • | | ٠ | • • | • | | • | • • | ٠ | • | • |
| • | • | ٠ | • • | • • | • | • | ٠ | • • | ٠ | ٠ | • | ٠ | • • | ٠ | • | * | • • | • | ٠ | * | • | • • | • | • | • • | • | ٠ | • • | • | ٠ | • • | • | • | • | • • | * | ٠ | • |
| • | ٠ | • | • • | • | ٠ | ٠ | | • • | ٠ | • | | • | • • | • | ٠ | | • • | | ٠ | | • | • • | • | | • • | • | 0 | • • | • | • | | ٠ | | ٠ | • • | • | • | • |
| • | ٠ | • | | • • | • | ٠ | • | • • | ٠ | • | | • | • • | • | ٠ | • | • • | • | ٠ | ٠ | • | • • | • | • | • • | • | ٠ | • • | • | • | | ٠ | ٠ | ٠ | • • | • | • | • |
| • | | • | • • | • • | | • | ٠ | • • | • | • | • | • | • • | • | • | ٠ | • • | • | • | • | • | • • | | | • • | • | • | | • | • | • • | • | | • | • • | • | ٠ | • |
| • | • | • | • • | | • | ٠ | 0 | • • | ٠ | ٠ | • | ٠ | • • | ٠ | ٠ | • | • • | • | • | ٠ | • | • • | • | • | • • | • | ٠ | • • | • | ٠ | • • | ٠ | | ٠ | • • | ٠ | | • |
| • | • | • | • • | • • | • | | • | • • | * | • | • | • | • • | • | ٠ | ٠ | • • | • | ٠ | | ٠ | • • | • | • | • • | • | ٠ | | • | • | | * | ٠ | ٠ | • • | • | ٠ | • |
| • | • | ۰ | • • | • • | · | • | • | • • | • | • | • | • | • • | • | ٠ | ٠ | • • | • • | • | • | ٠ | | · | • | • • | • • | ٠ | • • | • | • | | • | • | ÷ | • • | • | • | • |
| • | • | • | • • | | • | • | • | • • | • | • | • | • | • • | | • | • | • • | | • | | • | • • | • | • | • • | • | | • • | | • | | 0 | | ÷ | • • | • | • | • |
| • | • | • | • • | • • | · | • | • | • • | * | • | • | • | • • | • | * | • | • • | • • | • | * | • | | | • | • • | • | • | | | • | | * | * | ٠ | • • | • | ٠ | • |
| ÷ | · | | • • | | · | ÷ | 0 | • • | · | * | | * | • • | * | · | | • • | • • | ÷ | | • | • • | · | · | • • | | ÷ | • • | · | ÷ | • • | • | | ÷ | • • | * | • | • |
| | | | | | • | - | | | • | • | - | | | • | | - | | • | • | - | - | | • | - | | • | - | | • | • | | • | | - | | | - | |
| - | | | | | • | - | | | * | • | | | | • | | - | | | * | - | | | • | | | | - | | • | | | • | | - | | | - | |
| | • | | | - | | ٠ | | | | | | | | | | 0 | | - | | | | | | | | - | ٠ | | | | | - | | • | | | 0 | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |